

XXXIV SEMANA DO ECONOMISTA - UEM

Teoria do Portfólio

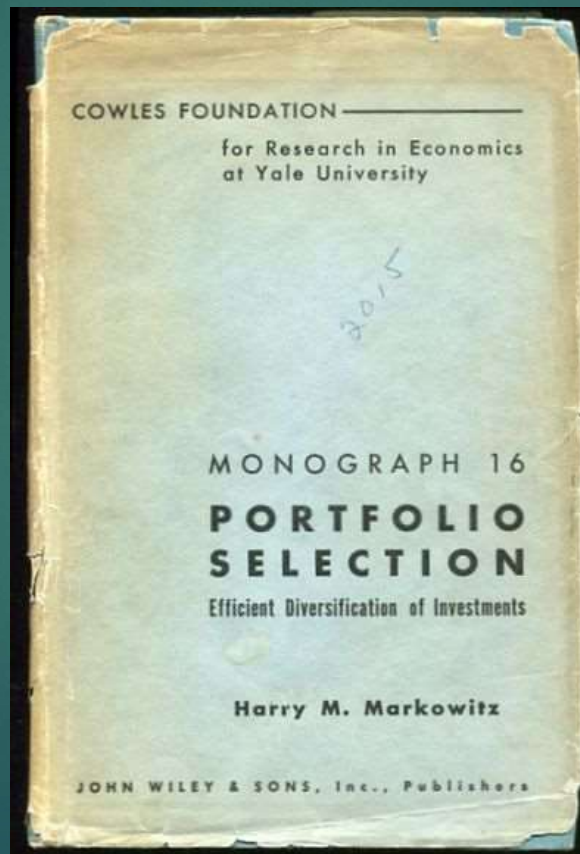
VINICIUS PELISER GIBIN

MESTRANDO PCE UEM

Teoria do Portfólio

2

- ▶ Harry Markowitz (1952, 1956, 1959);



Harry Markowitz (1952)

3

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ

The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing and variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the “expected returns—variance of returns” rule.

Teoria do Portfólio

4

- ▶ Harry Markowitz (1952, 1956, 1959): Risco e Retorno
 - ▶ Teoria da Média e Variância



Fonte: Fabozzi et al. (2002)

Premissas da teoria:

1. Os agentes são racionais e avessos ao risco;
2. A escolha da carteira é baseada no *trade-off* entre retorno esperado e risco da carteira. Assim, as curvas de utilidade do investidor são funções destas duas variáveis;
3. O risco do ativo/carteira é mensurado pela variância dos retornos dos ativos/carteira, enquanto que o retorno esperado é calculado pela média das possíveis rentabilidades;
4. Dado um nível de risco (retorno), a carteira escolhida será aquela que maximiza (minimiza) o retorno esperado (risco). Dessa forma, o agente maximizará a utilidade esperada do investimento em certo intervalo de tempo;
5. Inexistência de custos de transação e impostos.

Binômio retorno-risco

6

Retorno: Calculado como a média do retorno esperado dos n ativos, ponderada pela participação de cada ativo;

$$\begin{aligned} E(R_p) = \mu_p &= \sum_{i=1}^n X_i \mu_i = \\ &= [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \quad X_n] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = x' \mu \end{aligned}$$

Binômio retorno-risco

7

Risco: representado pela variância dos retornos da carteira (σ_p^2)

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} = \\ &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \text{M} \\ X_n \end{bmatrix} = x' \Omega x\end{aligned}$$

Binômio retorno-risco

8

Sabendo que: $\sigma_{ij} = \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij}$

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} X_1\sigma_1 & X_2\sigma_2 & X_3\sigma_3 & \dots & X_n\sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \rho_{3n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1\sigma_1 \\ X_2\sigma_2 \\ X_3\sigma_3 \\ \text{M} \\ X_n\sigma_n \end{bmatrix}$$

Binômio retorno-risco

9

Quanto menor a correlação entre os ativos, menor o risco total do investimento.

DIVERSIFICAÇÃO

$$\sigma_p^2 = [X_1\sigma_1 \quad X_2\sigma_2 \quad X_3\sigma_3 \quad \dots \quad X_n\sigma_n] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1\sigma_1 \\ X_2\sigma_2 \\ X_3\sigma_3 \\ \vdots \\ X_n\sigma_n \end{bmatrix}$$

Binômio retorno-risco

10

Outra forma de observarmos a variância:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n X_i X_j \sigma_{ij}$$

Binômio retorno-risco

11

Considerando $X = 1/n$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}_i^2 + \frac{n-1}{n} \bar{\sigma}_j^2$$

Binômio retorno-risco

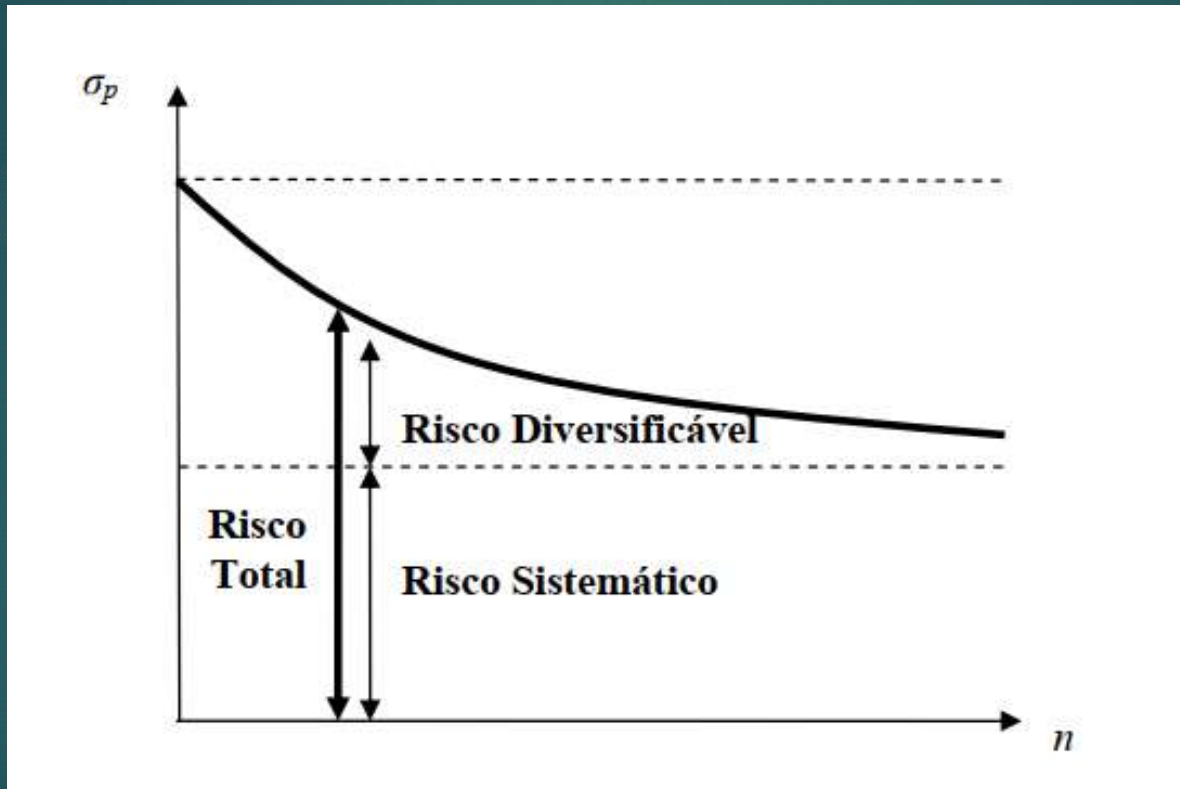
12

Quando $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}_i^2 + \frac{n-1}{n} \bar{\sigma}_u^2$$

Risco Diversificável e Sistemático

13



Fonte: Sharpe et al. (1995)

Fronteira Eficiente

14

- ▶ Dois ativos A e B;

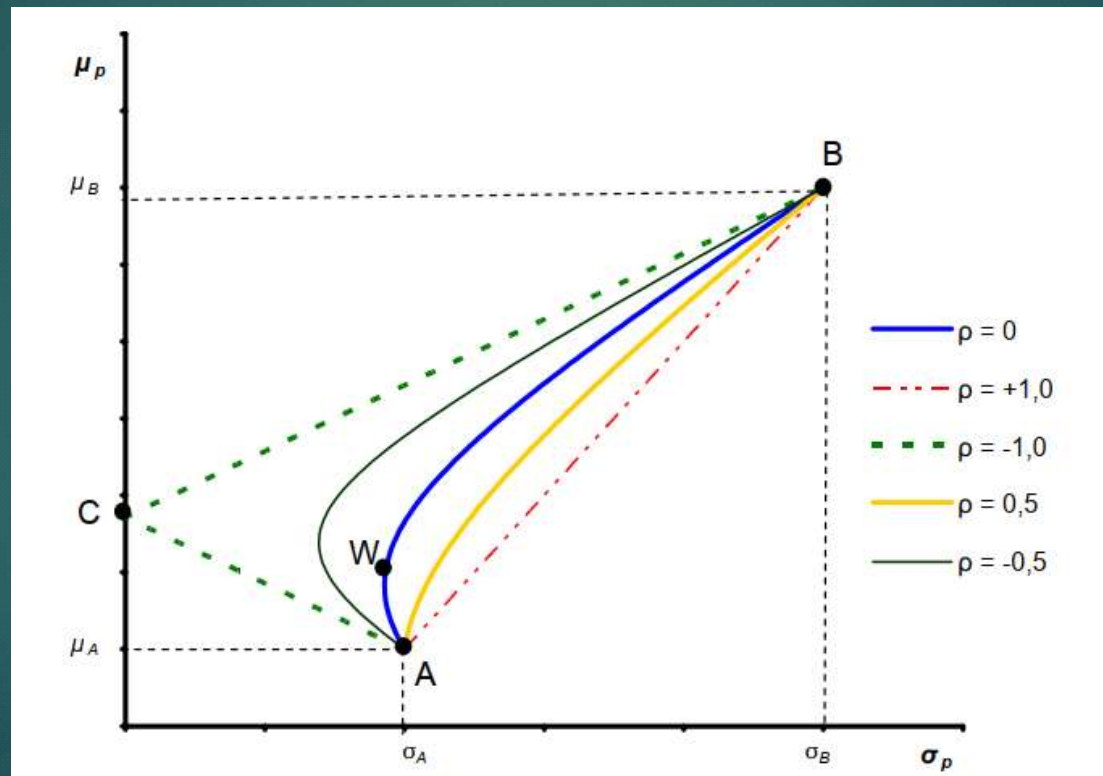
$$\mu_p = X_A \mu_A + X_B \mu_B$$

$$\sigma_p^2 = X_A^2 \sigma_A^2 + X_B^2 \sigma_B^2 + 2X_A X_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

Fronteira Eficiente

15

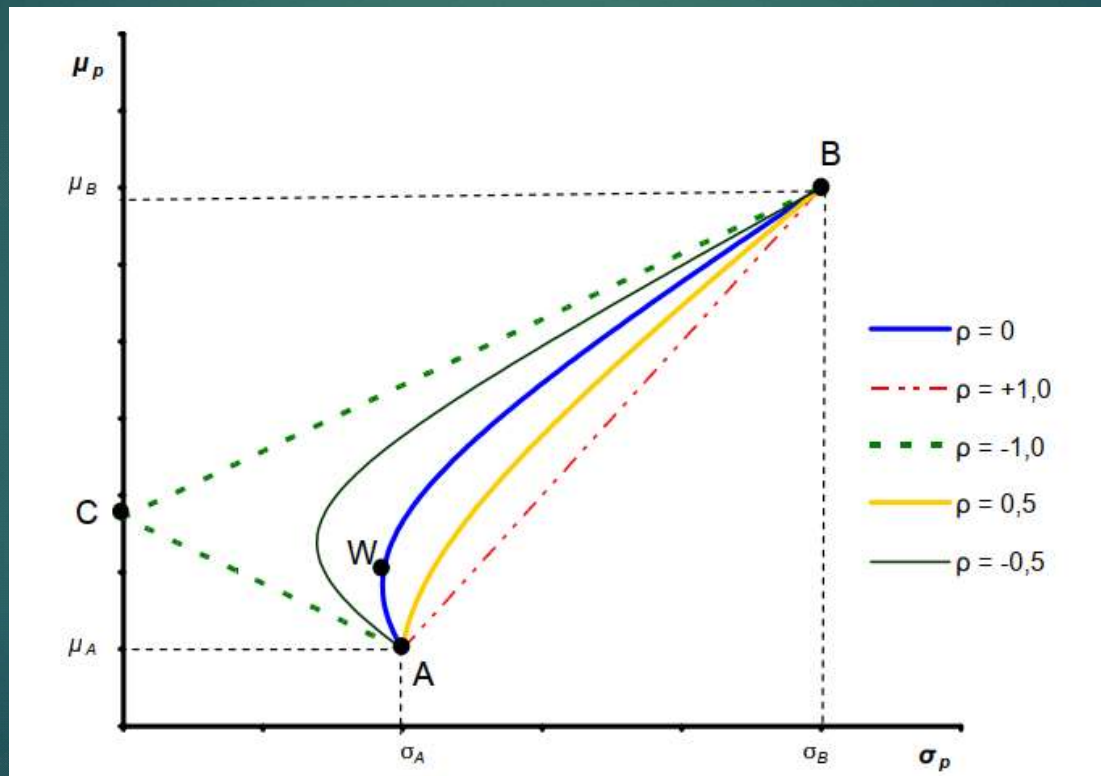
- Podemos verificar uma relação linear entre retorno e variância para coeficiente de correlação (ρ_{ij}) igual a -1 e 1;



Fronteira Eficiente

16

- ▶ Como exemplo: ρ_{ij} igual a 0;



Fronteira Eficiente

17

- Problema pode ser interpretado como um caso de maximização do retorno esperado, sujeito a uma restrição do nível de risco;

$$\max_x x' \mu$$

$$\text{Sujeito a: } \sigma_0 = \sqrt{x' \Omega x} \quad ; \quad \sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad ; \quad 0 \leq X_i \leq 1 \quad \text{em que, } i = 1, \dots, n \quad .$$

Simulações:

www.simuladordecarteiras.com.br

- ▶ Petrobras x Suzano (Ativos com baixa correlação);
- ▶ Bradesco x Itau (Ativos com alta correlação);
- ▶ Incluir Ambev;
- ▶ Incluir fundo de dólar;
- ▶ Comparação fundo de ações: Apex 30, Safari;
- ▶ Comparação entre multimercados: Verde, Adam, SPX e Bahia Maraú.

Referências

- ▶ FABOZZI, F.J.; GUPTA, F.; MARKOWITZ, H.M. The legacy of modern portfolio theory. *Journal of Investing*, New York, v. 11, n. 3, p. 8, 2002.
- ▶ MARKOWITZ, H.M. Portfolio selection. *Journal of Finance*, Chicago v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.
- ▶ MARKOWITZ, H.M. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, New York, v. 3, n. 1, p. 111-133, 1956.
- ▶ MARKOWITZ, H.M. **Portfolio selection**: efficient diversification of investments. New York: John Wiley & Sons, 1959. 344 p.
- ▶ SHARPE, W.F.; ALEXANDER, G.J.; BAILEY, J.V. **Investments**. 5th ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. 1058 p.